Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Andrea Nardi

Soluzioni 9 - 17 Dicembre 2013

1. $\begin{cases} y'(x) = |y(x)|^\alpha \\ y(0) = 0 \end{cases}$: Se $\alpha \geq 1$, la funzione $|y|^\alpha$ é localmente Lipschitziana in quanto

$$||y|^\alpha - |z|^\alpha| \leq |y-z|^\alpha = |y-z|^{\alpha-1}|y-z| = \frac{\alpha}{\alpha}|y-z|^{\alpha-1}|y-z| \leq \alpha|y-z|^{\alpha-1}|y-z| =_{(y-z=w)}$$

$$= \alpha|w|^{\alpha-1}|y-z| \leq \sup_{w\in[-M,M]} \alpha|w|^{\alpha-1}|y-z| = \alpha M^{\alpha-1}|y-z|.$$

Dunque, per il teorema di Picard, la soluzione del problema di Cauchy é unica; questa soluzione é la soluzione banale $y(x) \equiv 0$, perché la condizione iniziale é un punto di equilibrio del sistema.
Se invece $\alpha \in (0,1)$, é possibile trovare le altre soluzioni con il metodo di separazione delle variabili:

$$\frac{y'(x)}{|y(x)|^\alpha} = 1 \iff \frac{|y(x)|^{1-\alpha}}{1-\alpha} = x + c.$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo che $c = 0$, dunque

$$|y(x)|^{1-\alpha} = x(1-\alpha) \implies |y(x)| = [x(1-\alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \implies y(x) = \pm[x(1-\alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

che ci fornisce le altre due soluzioni.

2. Eseguendo il cambio di variabili suggerito otteniamo che

$$\begin{cases} u'(x) = y'(x) + z'(x) = (y(x) + z(x))^{n+1} = u^{n+1}(x) \\ v'(x) = y'(x) - z'(x) = (z(x) - y(x))(y(x) + z(x))^n = -v(x)u^n(x) \\ u(0) = y(0) + z(0) = 1 \\ v(0) = y(0) - z(0) = 1 \end{cases}$$

Dalla prima riga otteniamo che

$$u'(x) = u^{n+1}(x) \iff \frac{du}{u^{n+1}} = dx \iff -\frac{1}{nu^n(x)} = x + c_1 \iff -\frac{1}{n(x+c_1)} = u^n(x)$$

Essendo $u(0) = 1$ si ha che $c_1 = -\frac{1}{n}$ e pertanto $u^n(x) = \frac{1}{1-nx}$ da cui

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{1-nx}};$$

Sostituendo il risultato ottenuto nella seconda riga otteniamo che

$$v'(x) = -\frac{v(x)}{1-nx} \iff \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{1-nx} \iff \log(v(x)) = \frac{1}{n}\log(1-nx) + c_2$$

Imponendo i dati iniziali abbiamo che $c_2 = 0$ che ci dice che

$$v(x) = \sqrt[n]{1-nx}.$$

Dunque la soluzione del sistema é $\begin{cases} y(x) = \frac{u(x)+v(x)}{2} = \frac{1}{2\sqrt[n]{1-nx}} + \frac{\sqrt[n]{1-nx}}{2} \\ z(x) = \frac{u(x)-v(x)}{2} = \frac{1}{2\sqrt[n]{1-nx}} - \frac{\sqrt[n]{1-nx}}{2} \end{cases}$.

3. (a) $\begin{cases} y'(x) = y^3(x) - y(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$: Prima di tutto notiamo che se $y_0 = 0$ oppure $y_0 = \pm 1$ la soluzione del problema é costante $y(x) \equiv y_0$, perché 0 e ± 1 sono punti d'equilibrio del sistema. Esclusi tali casi procediamo come al solito per separazione di variabili:

$$y'(x) = y^3(x) - y(x) \iff \frac{dy}{y(y-1)(y+1)} = dx \iff \int \frac{dy}{y(y-1)(y+1)} = x + c$$

. Essendo

$$\frac{1}{y(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} + \frac{C}{y+1} = \frac{A(y^2-1) + B(y^2+y) + C(y^2-y)}{y(y-1)(y+1)} =$$

$$= \frac{y^2(A+B+C) + y(B-C) - A}{y(y-1)(y+1)} \Longrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = \frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y(y-1)(y+1)} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{2(y-1)} + \frac{1}{2(y+1)} \quad \text{e dunque}$$

$$\int \frac{dy}{y(y-1)(y+1)} = x + c \iff -\log|y(x)| + \frac{1}{2}\log|y(x)-1| + \frac{1}{2}\log|y(x)+1| = x + c \iff$$

$$\iff \log\left|\frac{y^2(x)-1}{y^2(x)}\right| = 2(x+c) \iff \left|\frac{y^2(x)-1}{y^2(x)}\right| = Ke^{2x}.$$

Imponendo il dato iniziale abbiamo che $K = \left|\frac{y_0^2-1}{y_0^2}\right|$ e quindi

$$\left|\frac{y^2(x)-1}{y^2(x)}\right| = \left|\frac{y_0^2-1}{y_0^2}\right| e^{2x} \Longrightarrow 1 - \frac{1}{y^2(x)} = \left(\frac{y_0^2-1}{y_0^2}\right) e^{2x} \Longrightarrow 1 - \left(\frac{y_0^2-1}{y_0^2}\right) e^{2x} = \frac{1}{y^2(x)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{y_0^2 - (y_0^2-1)e^{2x}}{y_0^2} = \frac{1}{y^2(x)} \Longrightarrow y^2(x) = \frac{y_0^2}{y_0^2 - (y_0^2-1)e^{2x}} \Longrightarrow y(x) = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 - (y_0^2-1)e^{2x}}}.$$

Questa soluzione é definita fintanto che l'argomento sotto la radice rimane positivo, ovvero $y_0^2 > (y_0^2 - 1)e^{2x}$. Notiamo subito che se $|y_0| \leq 1$ allora il termine di destra é sempre negativo e quindi la disuguaglianza é sempre verificata; pertanto,in tal caso, l'intervallo massimale di esistenza é $(-\infty, +\infty)$.
Per y_0 differenti abbiamo che

$$y_0^2 > (y_0^2-1)e^{2x} \iff e^{2x} < \frac{y_0^2}{y_0^2-1} \iff x < \log\left(\sqrt{\frac{y_0^2}{y_0^2-1}}\right)$$

e dunque l'intervallo massimale di esistenza risulta essere $\left(-\infty, \log\left(\sqrt{\frac{y_0^2}{y_0^2-1}}\right)\right)$.

(b) $\begin{cases} y'(x) = \begin{cases} y(x)\log|y(x)| & \text{se } y(x) \neq 0 \\ 0 & \text{se } y(x) = 0 \end{cases} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$: Come sopra abbiamo che la soluzione é costante $y(x) \equiv y_0$ se $y_0 = 0, \pm 1$.

Esclusi dunque questi casi risolviamo il sistema mediante il metodo di separazione delle variabili:

$$y'(x) = y(x)\log(y(x)) \iff \frac{dy}{y\log(y)} = dx \iff \log|\log|y(x)|| = x{+}c \iff$$

$$\iff |\log|y(x)|| = Ke^x$$

Imponendo il dato iniziale abbiamo che $|\log|y_0|| = K \Longrightarrow$
$\Longrightarrow |y(x)| = |y_0|^{e^x} \Longrightarrow y(x) = \text{sign}(y_0)|y_0|^{e^x}$.
Comunque prendo $y_0 \in \mathbb{R}$, la soluzione é definita $\forall x \in \mathbb{R}$, dunque l'intervallo massimale di esistenza della soluzione é $(-\infty, +\infty)$.

4. Cominciamo determinando i punti di equilibrio del sistema. Abbiamo che

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4y(x^2+y^2-2) = 0 \\ -4x(x^2+y^2-2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ x = y = 0 \end{cases}$$

e quindi i punti di equilibrio sono $(0,0)$ e tutti i punti sul bordo della circonferenza di raggio $\sqrt{2}$ centrata in $(0,0)$.
Cerchiamo ora una funzione Hamiltoniana $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ tale che $\begin{cases} \dot{x} = & \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} \end{cases}$;
se esiste H siffatta sará una costante del moto.
Sfruttando la prima riga del sistema abbiamo che

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial y} = 4y(x^2+y^2-2) \Longrightarrow H(x,y) = 2x^2y^2 + y^4 - 4y^2 + g(x)$$

ove il termine $g(x)$ esce dall'integrale rispetto ad y perché x é una costante quando deriviamo in y.
Presa in considerazione la funzione $H(x,y)$ ottenuta abbiamo che

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} = 4xy^2 + g'(x).$$

Ma dovendo essere

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} = -\dot{y} = 4x^3 + 4xy^2 - 8x \quad \text{si ha che} \quad g'(x) = 4x^3 - 8x, \quad \text{e quindi}$$

$$g(x) = x^4 - 4x^2 + c \Longrightarrow H(x,y) = 2x^2y^2 + y^4 - 4y^2 + x^4 - 4x^2 + c.$$

5. Affinché $H(\theta, y) = y^2 - y\sin\theta$ risulti essere una costante del moto, dovrá valere che $\dot{H} = 0$. Ma, essendo

$$\frac{d}{dt}H(\theta,y) = \Big\langle \nabla H(\theta,y), (\dot{\theta},\dot{y}) \Big\rangle$$

abbiamo che

$$\dot{H} = \langle(-y\cos\theta, 2y-\sin\theta), ((2y-\sin\theta)e^y, ye^y\cos\theta)\rangle =$$

$$= e^y(-2y^2\cos\theta + y\sin\theta\cos\theta + 2y^2\cos\theta - y\sin\theta\cos\theta) = 0$$

come volevamo dimostrare.

6. Per risolvere il problema posto quando $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ possiamo procedere in maniera lineare, difatti

$$\dot{x} = Ax \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

Dalla prima riga abbiamo che

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t) \Longleftrightarrow \frac{dx_1}{x_1} = 2dt \Longleftrightarrow x_1(t) = K_1 e^{2t}.$$

Imponendo il dato iniziale abbiamo che, essendo $x_1(0) = 2$, $K_1 = 2$.
Dunque $x_1(t) = 2e^{2t}$. Sostituendo nella seconda riga abbiamo che $\dot{x}_2(t) - x_2(t) = 2e^{2t}$, quindi procediamo con la sostituzione $x_2(t) = u(t)v(t)$

$$\Longrightarrow u'(t)v(t) + u(t)v'(t) - u(t)v(t) = 2e^{2t} \Longrightarrow u(t)[v'(t) - v(t)] + u'(t)v(t) = 2e^{2t}.$$

Come al solito imponiamo $v'(t) - v(t) = 0$ ottenendo che $v(t) = e^t$.
Sostituendo tale $v(t)$ nell'equazione otteniamo che

$$u'(t)e^t = 2e^{2t} \Longrightarrow u'(t) = 2e^t \Longrightarrow u(t) = 2e^t + K_2.$$

Quindi $x_2(t) = u(t)v(t) = 2e^{2t} + K_2 e^t$. Essendo $x_2(0) = 1$ otteniamo che $1 = 2 + K_2 \Longrightarrow K_2 = -1$. Dunque $x_2(t) = 2e^{2t} - e^t$.
Concludendo, la soluzione del sistema risulta essere

$$x(t) = (2e^{2t}, 2e^{2t} - e^t).$$

Cerchiamo ora la soluzione del secondo sistema.
In questo caso le cose sono leggermente piú complicate: se proviamo a procedere come nel caso appena analizzato incappiamo in un problema in quanto tutte e due le derivate dipendono da tutte e due le soluzioni del sistema, quindi non possiamo risolvere prima una riga e poi sfruttare il risultato ottenuto per risolvere la rimanente.
Occorre, dunque, trovare un sistema alternativo. Quello che vorremmo é che la matrice del sistema fosse diagonale, cosí da poter risolvere il sistema come al solito. Notiamo che

$$\dot{x} = Ax \Longleftrightarrow U\dot{x} = UAx \Longleftrightarrow U\dot{x} = UAU^{-1}Ux\ .$$

Imponiamo la sostituzione $y = Ux$ per ottenere che $\dot{y} = UAU^{-1}y$.
Se $D = UAU^{-1}$ fosse diagonale ci troveremmo cosí a dover risolvere il problema $\dot{y} = Dy$, cosa che sappiamo fare. Cerchiamo dunque una matrice U che renda D una matrice diagonale. La procedura standard da seguire é la seguente:

- Cerchiamo le radici del polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$, cioé i suoi autovalori ;
- Basandosi su tali radici costruiamo gli autovettori relativi ;
- Chiamati $v_1, \cdots, v_n$ gli autovaettori, abbiamo che

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

(gli autovettori saranno, cioé, le colonne della matrice che ci interessa)

- Invertiamo la matrice ottenuta e troviamo $D = UAU^{-1}$.

NB. Stiamo dando per scontato che gli autovalori siano tutti differenti e reali. Se cosí non fosse la procedura richiede delle modifiche che non analizzeremo in questa sede.

Applichiamo tale procedura ad $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

dunque

$$P(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} .$$

Costruiamo ora gli autovettori relativi a tali autovalori:

- $\begin{pmatrix} 4-\lambda_1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$ $\iff y = 2x \implies v_1 = (1, 2)$;
- $\begin{pmatrix} 4-\lambda_2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$ $\iff y = x \implies v_2 = (1, 1)$.

Quindi

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Invertiamo la matrice trovata (ognuno adoperi la maniera che preferisce) e troviamo che

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$D = UAU^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Possiamo quindi risolvere il sistema $\dot{y} = Dy$:

$$\dot{y} = Dy \iff \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \dot{y}_1(t) = 2y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = 3y_2(t) \end{cases} \iff \begin{cases} y_1(t) = K_1 e^{2t} \\ y_2(t) = K_2 e^{3t} \end{cases}$$

Dobbiamo ora tornare alle variabili $x_i(t)$:

$$y = Ux \iff \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y_1(t) = x_2(t) - x_1(t) \\ y_2(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ x_2(t) = 2y_1(t) + y_2(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(t) = K_1 e^{2t} + K_2 e^{3t} \\ x_2(t) = 2K_1 e^{2t} + K_2 e^{3t} \end{cases}$$

Dunque $x(t) = (K_1 e^{2t} + K_2 e^{3t}, 2K_1 e^{2t} + K_2 e^{3t})$.
Essendo $x(0) = (2,1)$ abbiamo che $(2,1) = (K_1 + K_2, 2K_1 + K_2) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (K_1, K_2) = (-1, 3)$ che ci dice che

$$x(t) = (3e^{3t} - e^{2t},\ 3e^{3t} - 2e^{2t}).$$

7. La risoluzione di questo esercizio segue esattamente la linea del precedente.

   Per risolvere $\dot{x} = Ax$ come per l'esercizio precedente applichiamo la sostituzione $Ux = y$ che ci porterá a risolvere $\dot{y} = UAU^{-1}y = Dy$, con D matrice diagonale.
   Cerchiamo U tale che $D = UAU^{-1}$ sia diagonale :

   $$\det(A-\lambda Id) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 9 \\ 2 & 2-\lambda & 19 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 19 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} +$$

   $$+9\det\begin{pmatrix} 2 & 2-\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (4-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 19] + 18 = (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 15) + 18 =$$

   $$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - \lambda - 42 = -(\lambda^3 - 8\lambda^2 + \lambda + 42) = -(\lambda - 7)(\lambda - 3)(\lambda + 2).$$

   Dunque $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -2$. Costruiamo gli autovettori associati a tali autovalori:

   - $\begin{pmatrix} 4-\lambda_1 & 0 & 9 \\ 2 & 2-\lambda_1 & 19 \\ 0 & 1 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 2 & -5 & 19 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$
     $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = 5z \end{cases} \Longrightarrow v_1 = (3, 5, 1)$;
   - $\begin{pmatrix} 4-\lambda_2 & 0 & 9 \\ 2 & 2-\lambda_2 & 19 \\ 0 & 1 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 2 & -1 & 19 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$
     $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -9z \\ y = z \end{cases} \Longrightarrow v_2 = (-9, 1, 1)$;
   - $\begin{pmatrix} 4-\lambda_3 & 0 & 9 \\ 2 & 2-\lambda_3 & 19 \\ 0 & 1 & 2-\lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 19 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$
     $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}z \\ y = -4z \end{cases} \Longrightarrow v_3 = (-3, -8, 2)$.

   Quindi

   $$U^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -9 & -3 \\ 5 & 1 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Invertendo (sempre nella maniera che si vuole) otteniamo che

   $$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{45} & -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$D = UAU^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{45} & -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 19 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 & -3 \\ 5 & 1 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{7}{12} & \frac{35}{12} \\ -\frac{3}{10} & \frac{3}{20} & \frac{3}{20} \\ -\frac{2}{45} & \frac{2}{15} & -\frac{8}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 & -3 \\ 5 & 1 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo dunque risolvere il sistema $\dot{y} = Dy$:

$$\dot{y} = Dy \iff \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \dot{y}_1(t) = 7y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = 3y_2(t) \\ \dot{y}_3(t) = -2y_3(t) \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} y_1(t) = K_1 e^{7t} \\ y_2(t) = K_2 e^{3t} \\ y_3(t) = K_3 e^{-2t} \end{cases}.$$

Ora

$$Ux = y \iff \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{45} & -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y_1(t) = \frac{1}{18}x_1(t) + \frac{1}{12}x_2(t) + \frac{5}{12}x_3(t) \\ y_2(t) = -\frac{1}{10}x_1(t) + \frac{1}{20}x_2(t) + \frac{1}{20}x_3(t) \\ y_3(t) = \frac{1}{45}x_1(t) - \frac{1}{15}x_2(t) + \frac{4}{15}x_3(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(t) = 3y_1(t) - 9y_2(t) - 3y_3(t) \\ x_2(t) = 5y_1(t) + y_2(t) - 8y_3(t) \\ x_3(t) = y_1(t) + y_2(t) + 2y_3(t) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1(t) = 3K_1 e^{7t} - 9K_2 e^{3t} - 3K_3 e^{-2t} \\ x_2(t) = 5K_1 e^{7t} + K_2 e^{3t} - 8K_3 e^{-2t} \\ x_3(t) = K_1 e^{7t} + K_2 e^{3t} + 2K_3 e^{-2t} \end{cases}.$$

Applicando il dato iniziale $x(0) = (0, 3, 2)$ otteniamo che

$$\begin{cases} 0 = 3K_1 - 9K_2 - 3K_3 \\ 3 = 5K_1 + K_2 - 8K_3 \\ 2 = K_1 + K_2 + 2K_3 \end{cases} \iff \begin{cases} K_1 = \frac{1}{12} \\ K_2 = \frac{1}{4} \\ K_3 = \frac{1}{3} \end{cases},$$

che ci dice che

$$x(t) = \left(\frac{13}{4}e^{7t} - \frac{9}{4}e^{3t} - e^{-2t},\ \frac{65}{12}e^{7t} + \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{8}{3}e^{-2t},\ \frac{13}{12}e^{7t} + \frac{1}{4}e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-2t} \right).$$

8. Consideriamo la funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\ dx.$$

Calcoliamo $f'(\alpha)$ usando la formula di derivazione sotto il segno di integrale:

$$f'(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(e^{-\alpha x^2} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-\alpha x^2} \frac{x^2(1 - \cos(x))}{x^2} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} (\cos(x) - 1) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos(x)\ dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\ dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos(x)\ dx - \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos(x)\ dx$ consideriamo la funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos(\beta x)\ dx.$$

Dalla regola di derivazione sotto il segno di integrale abbiamo :

$$g'(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-\alpha x^2} \cos(\beta x))\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -x e^{-\alpha x^2} \sin(\beta x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\alpha x) e^{-\alpha x^2} \cos(\beta x)\ dx = \frac{1}{2\alpha} \left\{ \lim_{t \to +\infty} \left[e^{-\alpha x^2} \sin(\beta x) \right]_{-t}^{t} - \int_{-\infty}^{+\infty} \beta e^{-\alpha x^2} \cos(\beta x)\ dx \right\} =$$

$$- \frac{\beta}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos(\beta x)\ dx = -\frac{\beta}{2\alpha} g(\beta).$$

Per determinare $g(\beta)$ dobbiamo risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} g'(\beta) = -\frac{\beta}{2\alpha} g(\beta) \\ g(0) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \end{cases}$.

Ma

$$g'(\beta) = -\frac{\beta}{2\alpha} g(\beta) \Longleftrightarrow \frac{dg}{g} = -\frac{1}{2\alpha} \beta d\beta \Longleftrightarrow g(\beta) = K e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Imponendo il dato iniziale abbiamo che $K = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Longrightarrow g(\beta) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$.
Dunque

$$f'(\alpha) = g(1) - \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(e^{-\frac{1}{4\alpha}} - 1 \right) .$$

Osserviamo che $\lim_{\alpha \to +\infty} e^{-\alpha x^2} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = 0 \Longrightarrow \lim_{\alpha \to +\infty} f(\alpha) = 0$.
Dunque

$$-f(x) = \lim_{y \to +\infty} f(y) - f(x) = \lim_{y \to +\infty} \int_{f(x)}^{f(y)} df =_{(f = f(\alpha))} \int_{x}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(e^{-\frac{1}{4\alpha}} - 1 \right) d\alpha =_{(t^2 = \frac{1}{4\alpha})}$$

$$= \sqrt{\pi}\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \frac{e^{-t^2}-1}{t^2}\ dt = \sqrt{\pi}\left\{\lim_{s\to 0}\left[-\frac{1}{t}\left(e^{-t^2}-1\right)\right]_s^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} - 2\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} e^{-t^2}\ dt\right\} =$$

$$= \sqrt{\pi}\left(2\sqrt{x}\left(1-e^{-\frac{1}{4x}}\right) - 2\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} e^{-t^2}\ dt\right) = 2\sqrt{\pi x}\left(1-e^{-\frac{1}{4x}}\right) - 2\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} e^{-t^2}\ dt.$$

Posta

$$\operatorname{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}\ dx \qquad \left(\text{osserviamo che } \lim_{t\to\infty}\operatorname{erf}(\mathrm{t}) = 1\right)$$

abbiamo che

$$-f(x) = 2\sqrt{\pi x}\left(1-e^{-\frac{1}{4x}}\right) - 2\sqrt{\pi}\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} e^{-t^2}\ dt = 2\sqrt{\pi x}\left(1-e^{-\frac{1}{4x}}\right) - \pi\ \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\Longrightarrow f(\alpha) = \pi\ \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right) - 2\sqrt{\pi\alpha}\left(1-e^{-\frac{1}{4\alpha}}\right),\ \alpha > 0.$$

Dunque

$$\lim_{\alpha\to 0^+} f(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\ dx = \lim_{\alpha\to 0^+}\left[\pi\ \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right) - 2\sqrt{\pi\alpha}\left(1-e^{-\frac{1}{4\alpha}}\right)\right] = \pi.$$

NB. Senza la restrizione data avremmo avuto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\ dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\cos(x)-1}{x}\right]_{-t}^{t} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\ dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\ dx = \pi$$

compiendo una semplice integrazione per parti.

http://z0r.de/3714